Beispiele

Im Folgenden sind die Anfänge von **Zahlenfolgen** angegeben. Versuche jeweils, soweit es möglich und sinnvoll ist, mindestens drei weitere Zahlen der Folge mit unendlich vielen Folgengliedern anzugeben.

1. $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \ldots$
2. $2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \ldots$
3. $14 \quad 12 \quad 10 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \ldots$
4. $3 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad \ldots$
5. $2 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 8 \ldots$
6. $1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \ldots$
7. $+1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \ldots$
8. $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \ldots$
9. $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{10} \ldots$
10. $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \ldots$
11. $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \ldots$
12. $2 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 5 \quad 10 \quad \ldots$
13. $7 \quad 3 \quad 9 \quad 5 \quad 11 \quad 7 \quad 13 \ldots$
14. $2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \ldots$
15. $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \ldots$
16. $1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \ldots$
17. $1 \quad -4 \quad 9 \quad -16 \quad 25 \ldots$
18. $2 \quad 4 \quad 3 \quad 9 \quad 4 \quad 16 \ldots$
19. $2\frac{1}{3} \quad 2 \quad 1{,}8 \quad 1\frac{2}{3} \quad 1\frac{4}{7} \ldots$
20. $163 \quad 55 \quad 19 \quad 7 \ldots$
21. $0{,}3 \quad 0{,}6 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}6 \ldots$

22. 100 95 90 85 80...

23. 1 8 27 64...

24. 0 128 64 96 80...

25. 1 2 6 24 120 720...

26. 0 1 3 7 15 31...

27. 0,3 0,33 0,333 0,3333...

Definitionen

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Zahlenfolge** oder kurz **Folge**. Die einzelnen Funktionswerte heißen **Glieder der Folge**. n heißt die **Platznummer** des Folgenglieds a_n. Mit a_n wird ein einzelnes Folgenglied bezeichnet, mit (a_n) die ganze Folge.

Eine Folge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz $d = a_{n+1} - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konstant und ungleich 0 ist. Man kann die arithmetische Folge **rekursiv** darstellen durch

$a_{n+1} = a_n + d$ oder **explizit** durch $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge (a_n) mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konstant und ungleich 1 ist. Man kann die geometrische Folge **rekursiv** darstellen durch

$a_{n+1} = a_n \cdot q$ oder **explizit** durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgaben

1. Finde in den oben angegebenen Beispielen alle arithmetischen Folgen. Notiere jeweils a_1 und d.

2. Finde in den oben angegebenen Beispielen alle geometrischen Folgen. Notiere jeweils a_1 und q.

3. Gib die ersten 5 Glieder der arithmetischen Folge an mit

   (a) $a_1 = 4 \quad d = \frac{1}{2}$
   (b) $a_1 = 1 \quad d = -1$
   (c) $a_2 = 5 \quad d = 3$
   (d) $a_1 = 1 \quad d = 1$
   (e) $a_1 = \frac{2}{3} \quad d = -\frac{1}{6}$

4. Gib die ersten 5 Glieder der geometrischen Folge an mit

   (a) $a_1 = 4 \quad q = \frac{1}{2}$

   (b) $a_1 = 1 \quad q = -1$

   (c) $a_2 = 5 \quad q = 3$

   (d) $a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{3}$

   (e) $a_5 = 32 \quad q = \sqrt{2}$

5. Von welcher Platznummer an sind die Glieder der geometrischen Folge mit

   (a) $a_1 = 5$ und $q = 2$ größer als 10^6?

   (b) $a_1 = 2$ und $q = 3$ größer als 10^9?

   (c) $a_1 = 1$ und $q = \frac{1}{3}$ kleiner als 10^{-5}?

6. Ein Kaninchenpaar wirft vom 2. Monat an in jedem Monat ein junges Paar und die Nachfahren verfahren ebenso.

   Wie viele Kaninchenpaare leben nach $1, 2, 3, \ldots, 10, n$ Monaten, wenn zu Beginn der Zählung genau ein Paar vorhanden war?

7. Wir stellen uns eine sehr hohe Treppe vor. Die erste Stufe muss auf jeden Fall betreten werden. Danach ist es möglich, von jeder erreichten Stufe aus entweder eine oder zwei Stufen höher zu steigen.

   Wir stellen uns nun die etwas kuriose Frage, auf wie viele verschiedene Arten man bis zu der Stufe mit der Nummer $1, 2, 3, \ldots, 10, n$ gelangen kann.

8. Die Folge der FIBONACCI-Zahlen (a_n) ist auf folgende Weise rekursiv definiert:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ 1 & \text{für} \quad n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} & \text{für} \quad n > 2 \end{cases}$$

   Gib die Folgenglieder a_1 bis a_{10} an.

9. Bestimme die ersten 6 Folgenglieder der Folgen a_n mit

   (a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad n = 1 \\ a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases}$

   (b) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ n - a_{a_{n-1}} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases}$

   (c) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ n - a_{a_{a_{n-1}}} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases}$

   (d) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \leq 2 \\ a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}} & \text{für} \quad n > 2 \end{cases}$

10. Wie groß ist die Summe aller dreistelligen Zahlen, die
    (a) durch 5 teilbar sind?
    (b) durch 9 teilbar sind?

11. In einem Amphitheater befinden sich in der untersten Reihe 78 Sitzplätze und in jeder folgenden Reihe 8 Plätze mehr.
    (a) Wie viele Personen finden in der obersten Reihe Platz?
    (b) Wie viele Sitzplätze hat das Theater, wenn 18 Sitzreihen vorhanden sind?

12. Ein Kapital von 1000 Euro wird 4 Jahre lang zu einem Zinssatz von 5% angelegt. Die Zinsen werden am Ende jeden Jahres dem Kapital zugeschlagen. Bestimme das Kapital am Ende des 4. Jahres unter Beachtung der Zinseszinsen!

13. Ein Grundkapital k wird n Jahre lang zu einem Zinssatz von $p\%$ angelegt. Die Zinsen werden am Ende jeden Jahres dem Kapital zugeschlagen. Bestimme eine Formel für das Kapital k_n am Ende des $n$ten Jahres!

14. Die Bevölkerung eines Landes wird auf 68 Millionen Einwohner geschätzt. In den letzten Jahren war der durchschnittliche jährliche Zuwachs 2,8%. Mit welcher Einwohnerzahl kann man bei dieser Wachstumsquote in 10 Jahren rechnen?

15. Bestimme die Folgen der Seitenlängen und der Quadrat-Flächeninhalte jeweils für die äußersten rechten und linken Zweige! Welche Folgen ergeben sich?

Der Baum des Pythagoras