Mathematische Probleme mit PHP (Kontrollstrukturen)

1. **Die Fakultät** kann man definieren durch

   $0! = 1, \quad n! = n(n-1)! \text{ für } n > 0.$

   Z.B. ist dann (lies: „Vier Fakultät“) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

   (a) Schreibe ein Programm, das für eine natürliche Zahl n die zugehörige Fakultät $n!$ berechnet.

   (b) Schreibe ein Programm, das 1! bis 50! ausgibt.

   (c) Bis zu welchem n kann der Computer $n!$ berechnen? Warum kann er dies für größere n nicht? Wie weit kommt dein Taschenrechner?

   (d) Die Fakultät soll mit einer Funktion `function fakultaet($zahl)` berechnet werden.

2. **Reihen** sind Summen mit unendlich vielen Summanden. Die Summe kann dabei beliebig groß, einen bestimmten Wert ergeben oder überhaupt nicht „vernünftig“ berechenbar sein. Besonders interessant sind Reihen, deren Summe eine endliche Zahl ergibt. Schreibe Programme, die die folgenden Reihen berechnen. Wenn es Dir klar ist, was das Ergebnis sein muss, dann genügt auch statt des Programmes eine Erläuterung bzw. Begründung des Ergebnisses. Da wir ja nicht ewig auf ein Rechenergebnis warten können, müssen wir uns leider beim Einsatz des Computers mit endlich vielen Summanden begnügen.

   Klassifiziere die Reihen.

   Die Summanden können nummeriert werden mit den Nummern $n = 0, 1, 2, \ldots$ oder $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

   (b) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$

   (c) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$

   (d) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

   (e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

   (f) $9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$

   (g) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$

   (h) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

3. **Folgen** sind einfach unendlich viele nummerierte Zahlen. Diese Zahlen mit einer Nummer werden meist mit a_i bezeichnet, wobei i die Nummer der Zahl oder den Index darstellt. Die Fakultäten bilden z.B. eine Folge:

Nummer i:	0	1	2	3	4	5	6
Zahl der Folge a_i (hier ist $a_i = i!$)	1	1	2	6	24	120	720

Hier ist also z.B. $a_4 = 24$.

In der Mathematik sind besonders diejenigen Folgen interessant, deren Zahlen sich einem bestimmten Wert immer mehr annähern. Diesen Wert nennt man dann *Grenzwert* der Folge. Nähert sich eine Folge einem Grenzwert an, so nennt man die Folge *konvergent* und sonst *divergent*.

Stelle durch eine Überlegung oder mit Hilfe eines Programmes fest, ob die folgenden Folgen einen Grenzwert besitzen oder nicht ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

(a) $a_1 = 1;\quad a_2 = \frac{1}{2};\quad a_3 = \frac{1}{3};\quad a_4 = \frac{1}{4};\quad \ldots\quad a_i = \frac{1}{i};\quad \ldots$

(b) $a_i = (-1)^i$

(c) $a_i = 2 * i$

(d) $a_i = \frac{1}{i!}$

(e) $a_i = 2i$

(f) $a_i = 7 + \frac{(-1)^i}{i}$

(g) $a_i = \frac{i+1}{i}$

(h) $a_i = \frac{i^2+1}{i}$

(i) $a_i = \frac{i+1}{i^2}$

(j) $a_i = \frac{3i^2+2i+1}{2i^2+17i+3}$

(k) Das erste Folgenglied sei eine beliebige ganze Zahl x: $a_1 = x$. Die folgenden Folgenglieder sollen nach der folgenden Vorschrift gebildet werden:

  i. Ist $a_i = 1$, so sollen alle weiteren Folgenglieder diesen Wert haben. Ein Programm zur Berechnung dieser Folge soll in diesem Fall stoppen.

  ii. Ist a_i gerade, so soll $a_{i+1} = \frac{a_i}{2}$ sein.

  iii. Ist a_i ungerade, so soll $a_{i+1} = 3a_i + 1$ sein.

  Teste diese Folge (zuerst auf einem Blatt Papier und dann erst mit dem Computer) mit verschiedenen Startwerten, die auch negativ sein können. Fasse die Ergebnisse deiner Experimente mit verschiedenen Startwerten zusammen [1].

  Bei welchen Zahlen, die die Folge irgendwann trifft, kann man sicher sein, dass die Folge am Ende bei 1 landet?

[1] Das Verhalten dieser Folge für beliebig große Startwerte ist bis auf den heutigen Tag ein ungelöstes Problem der Mathematik bzw. der Informatik.