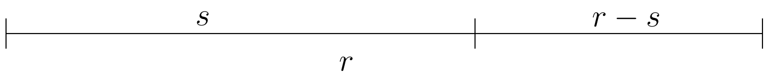
Definition

Eine Strecke mit der Länge r soll nach dem Verfahren des *Goldenen Schnitts* geteilt werden. Dann verhält sich die Gesamtstreckenlänge zur größeren Teilstreckenlänge wie die größere zur kleineren Teilstreckenlänge.



Hier muss dann gelten: $\boxed{\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}}$
Dann erhält man $r(r-s) = s^2 \iff r^2 - sr - s^2 = 0$ als quadratische Gleichung für r mit den Lösungen

$$r = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + s^2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}s^2} = s \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Gesucht ist hierbei nur die positive Lösung, d.h.

$$r = s \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = s \cdot \phi \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Zusammenfassung: Wir bezeichnen das Verhältnis von größerer zu kleinerer Streckenlänge als $\boxed{\frac{r}{s} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots}$

Wichtige Beziehungen

$\boxed{\frac{1}{\phi} = \phi - 1}$
Beweis: $\frac{1}{\phi} = \frac{s}{r} = \frac{r-s}{s} = \frac{r}{s} - 1 = \phi - 1$
$\boxed{\phi^2 = 1 + \phi}$
Beweis: $\phi^2 = \frac{r^2}{s^2} = \frac{s^2+sr}{s^2} = 1 + \frac{r}{s} = 1 + \phi$

Geometrische Konstruktion

Schon seit der Antike bekannt ist die folgende Konstruktion des Punktes T, der die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt. Unten dargestellt ist die Konstruktion mit dem Programm *DynaGeo*.

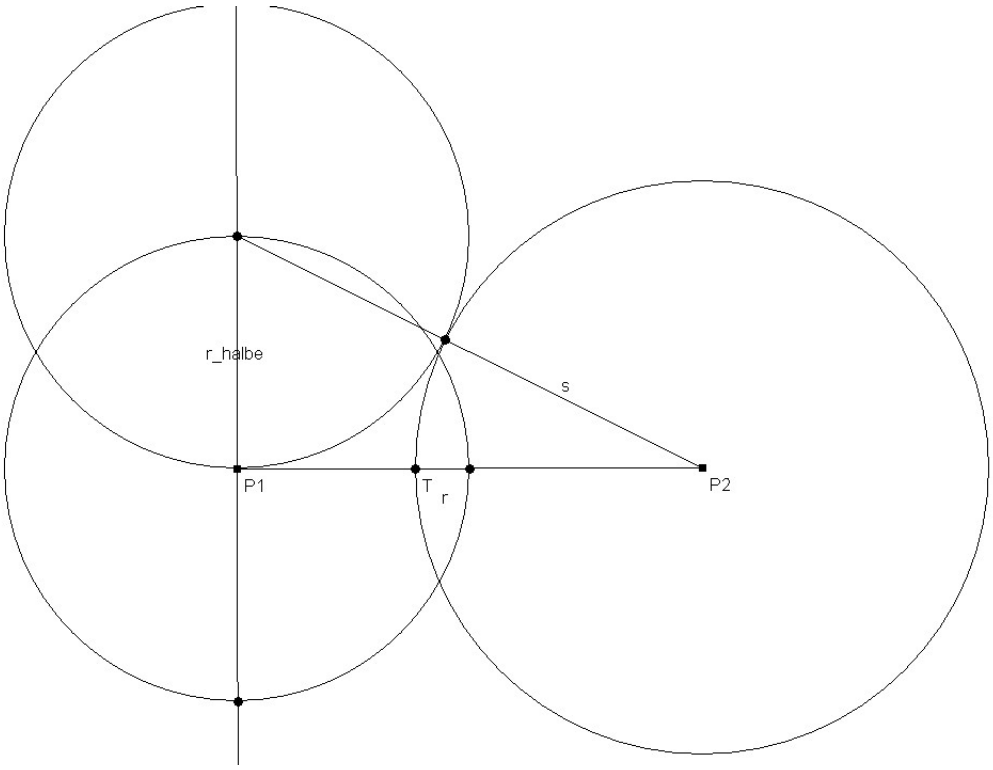
Beweis: Nach Pythagoras gilt

$$r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + s\right)^2$$

$$r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4} + rs + s^2$$

$$r^2 - rs - s^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung für den goldenen Schnitt (siehe oben).

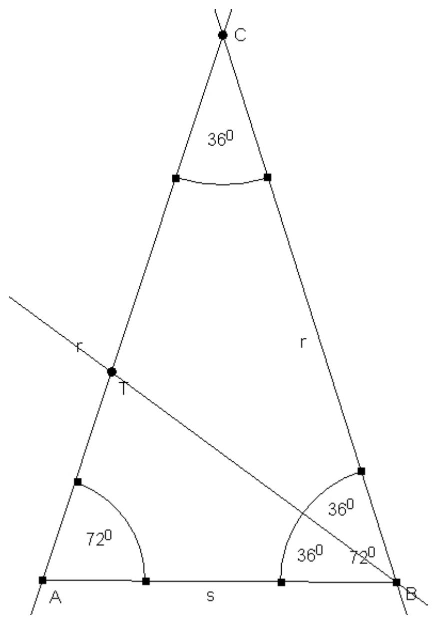


Goldenes Dreieck

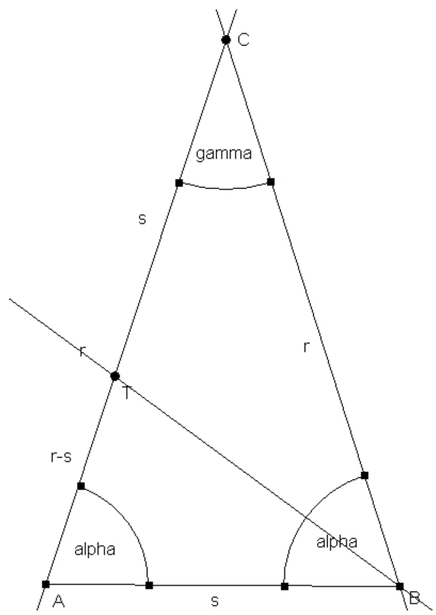
Satz 1: Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Innenwinkeln 72° und 36° heißt *goldenes Dreieck*, denn die Schenkel und die Basis stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts.
Beweis (Skizze siehe unten):

- Die Schenkellängen seien mit r und die Basislänge sei mit s bezeichnet.
- Die Winkelhalbierende teilt die Strecke $\overline{AC}$ im Punkt T.
- Das Dreieck ABT ist gleichschenklig. Also ist $|\overline{TB}| = s$.
- Das Dreieck BCT ist gleichschenklig. Also ist auch $|\overline{TC}| = s$.

- Damit ist $|\overline{AT}| = r - s$.
- Die Dreiecke ABC und TAB sind ähnlich.
- In ähnlichen Dreiecken sind entsprechende Längenverhältnisse gleich. Also gilt
  $$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$$
  und damit stehen Schenkellänge und Basislänge im Verhältnis des goldenen Schnitts.



Satz 2: Stehen bei einem gleichschenkligen Dreieck ein Schenkel und die Basis im Verhältnis des goldenen Schnitts, dann hat das Dreieck die Innenwinkel 36° und 72°.
Beweis:



- Das Dreieck ABC sei wie folgt konstruiert: Die Strecke $\overline{AC}$ werde in T nach dem goldenen Schnitt geteilt. Danach ergibt sich B mit $|\overline{CB}| = r$ und $|\overline{AB}| = s$.
- Hilfssatz 1: *Eine Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

  Es gilt auch die Umkehrung: Teilt eine Gerade durch einen Eckpunkt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, dann ist die Gerade die Winkelhalbierende.
- Nach Konstruktion ist $\frac{s}{r-s} = \frac{r}{s}$. Also ist $\overline{BT}$ die Winkelhalbierende von α.
- Hilfssatz 2: *Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen zweier Seiten und in den von diesen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.*

  Damit sind die Dreiecke TAB und ABC ähnlich, weil $\frac{s}{r-s} = \frac{r}{s}$ und der eingeschlossene Winkel α ist.
- Damit ergibt sich $\frac{\alpha}{2} = \gamma$.
- Mit $2\alpha + \gamma = 180^\circ \iff \frac{5}{2}\alpha = 180^\circ \iff \alpha = 72^\circ$ ist $\gamma = 36^\circ$.

Ergänzung:
Mit dem Kosinussatz gilt:

$$\begin{aligned}
s^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2\cos\gamma = 2r^2 - 2r^2\cos\gamma = 2r^2(1-\cos\gamma) \\
\frac{s^2}{2r^2} &= 1 - \cos\gamma \\
\cos\gamma &= 1 - \frac{s^2}{2r^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2\phi^2} \\
&= \frac{2\phi^2 - 1}{2\phi^2} = \frac{\phi^2 + (\phi^2 - 1)}{2\phi^2} \\
&= \frac{\phi^2 + \phi}{2\phi^2} \quad \text{weil} \quad \phi^2 = 1 + \phi \\
&= \frac{\phi + 1}{2\phi} = \frac{\phi^2}{2\phi} \\
&= \frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

Es ist gewiss ein bemerkenswertes Ergebnis, dass bei einem bestimmten Kosinus der goldene Schnitt auftaucht. Mit dem Ergebnis des Beweises ergibt sich die erstaunliche Identität

$$\boxed{\cos 36^\circ = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

Kreisteilung

Ein klassisches Problem der Geometrie ist die *Kreisteilung*. Dabei geht es um die Frage, ob ein bestimmtes regelmäßiges Vieleck nur mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Sehr einfach sind die Konstruktionen für das regelmäßige Drei-, Vier-, Sechs- und Achteck. Dementsprechend sind auch 12-, 16-, 24-Eck und andere mit doppelter Eckenanzahl einfach konstruierbar.
Jahrhundertelang versuchten sich erfolglos Mathematiker an der Konstruktion des regelmäßigen 7-Ecks und des regelmäßigen 9-Ecks, bis erst im 18. Jahrhundert von Gauss[1] bewiesen wurde, dass deren Konstruktion mit Zirkel und Lineal unmöglich ist.
Algebraisch betrachtet lässt sich die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks zurückführen auf die Kreisteilungsgleichung

$$z^n = 1.$$

Die Variable z in dieser Gleichung ist eine komplexe Zahl. Das geometrische Kreisteilungsproblem ist genau dann lösbar, wenn die Kreisteilungsgleichung eine Lösung hat, die sich durch rationale Zahlen, die vier Grundrechenarten, Klammern, Quadratwurzeln sowie die imaginäre Einheit i ausdrücken lässt. In welchen Fällen dieses Kriterium erfüllt ist, lässt sich mit der Galois-Theorie[2] untersuchen. Eine entscheidende Rolle dabei spielen die Kreisteilungspolynome. Ergebnis dieser Überlegungen ist der folgende Satz:
Ein regelmäßiges Vieleck mit n Ecken lässt sich genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn sich n in der Form

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots p_m$$

mit $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ schreiben lässt, wobei die Faktoren $p_1, \ldots,\ p_m$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen[3], also Primzahlen der Form $2^{2^n} + 1$ sind, wobei n eine nichtnegative ganze Zahl ist.

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (geb. 30. April 1777 in Braunschweig; gest. 23. Februar 1855 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker mit einem breit gefächerten Feld an Interessen. Er wird als einer der wichtigsten Mathematiker betrachtet (und als Fürst der Mathematik oder princeps mathematicorum bezeichnet).

[2] Evariste Galois (geb. 25. Oktober 1811 in Bourg-la-Reine; gest. 31. Mai 1832 in Paris) war ein französischer Mathematiker. Er starb im Alter von nur 20 Jahren bei einem Duell.

[3] Pierre de Fermat (geb. Ende 1607 oder Anfang 1608 in Beaumont-de-Lomagne; gest. 12. Januar 1665 in Castres) war ein bedeutender französischer Mathematiker und Jurist. Am bekanntesten von ihm ist wohl die Fermatsche Vermutung oder der Große Fermatsche Satz (als wörtliche Übersetzung der englischen Bezeichnung oft auch als Fermats letzter Satz bezeichnet): Diese berühmteste auf Fermat zurückgehende Behauptung besagt, dass die diophantische Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ für keine natürliche Zahl $n > 2$ erfüllt ist. Es gibt also keine Analoga zu den pythagoräischen Tripel für die dritte oder höhere Potenzen. Seine Berühmtheit erlangte dieser Satz dadurch, dass Fermat in einer Randnotiz seines Exemplars der Arithmetica des Diophant behauptete, dafür einen „wunderbaren“ Beweis gefunden zu haben, für den aber „auf dem Rand nicht genug Platz“ sei. Der Fall $n = 4$ wurde von Fermat an anderer Stelle bewiesen, weitere Fälle später von anderen Mathematikern. In seiner Allgemeinheit blieb die Aussage bis vor Kurzem eines der berühmtesten ungelösten Probleme der Mathematik. Erst 1993 (publiziert 1995 mit einem Beitrag von Richard Taylor) gelang es dem britischen Mathematiker Andrew Wiles, die Fermatsche Vermutung zu beweisen. Daher wird diese auch als Satz von Fermat-Wiles oder Satz von Wiles-Taylor bezeichnet.

Bei einem regelmäßigen n-Eck ist der Mittelpunktswinkel $\frac{360°}{n}$ groß. Mit den oben angestellten Vorbereitungen ist es nun möglich, ein regelmäßiges Zehneck und dann natürlich auch ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren.

Aufgaben

Führe mit einem Programm zur dynamischen Geometrie die folgenden Konstruktionen aus:

1. Eine Strecke $\overline{AB}$ wird durch einen beliebigen Punkt T geteilt. Der Punkt T sollte sich nur auf der Strecke verschieben lassen. Lass alle Längen messen und dir die Quotienten des goldenen Schnittes anzeigen, um so die Position von T für den goldenen Schnitt durch Verschiebung des Punktes zu finden.

2. Teile eine Strecke nach dem goldenen Schnitt nur mit Zirkel und Lineal nach dem antiken Verfahren.

3. Konstruiere ein goldenes Dreieck.

4. Konstruiere ein regelmäßiges Zehn- und ein regelmäßiges Fünfeck.

5. Konstruiere aus dem regelmäßigen Fünfeck ein Pentagramm.

6. Welche Beziehung ergibt sich zwischen der Seitenlänge des Fünfecks und den Seiten des Pentagramms?

7. Im goldenen Dreieck treten neben 36° auch die Winkel 72° und 108° auf. Finde Ausdrücke für $\cos 72°$ und $\cos 108°$.

   (Zur Kontrolle: $\cos \frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{2\phi}$)

8. Bestimme die ersten fünf Fermatschen Primzahlen.

9. Stelle fest, welche regelmäßigen n-Ecke mit $n \leq 68$ nach der Galois-Theorie mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.