

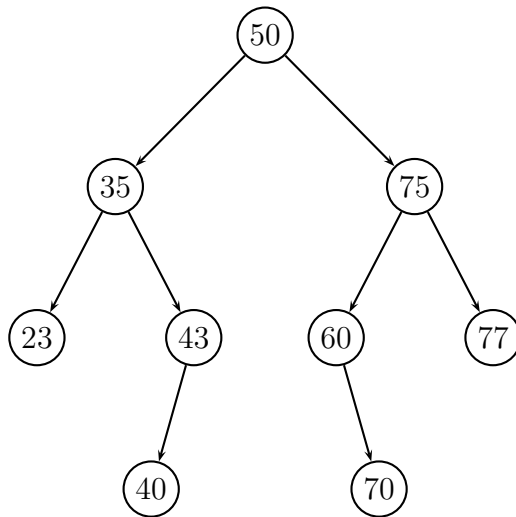
Baumstrukturen

1 Definitionen

- Eine *Baumstruktur* vom Grundtyp T ist entweder
 1. die leere Struktur oder
 2. ein *Knoten* (node) vom Typ T mit einer endlichen Zahl verknüpfter, voneinander verschiedener Baumstrukturen vom Grundtyp T , sogenannter *Teilbäume* (sub-trees).
- Ein *geordneter Baum* ist ein Baum, dessen Verzweigungen in jedem Knoten geordnet sind.
- Jedem Knoten eines Baumes kann eine *Stufe* zugeordnet werden. Die *Wurzel* des Baumes, d.h. der Knoten ohne Vorgänger, besitzt die Stufe 1; alle Knoten besitzen eine um 1 größere Stufe als ihre Vorgänger oder *Vater*. Die größte Stufe eines Baumes heißt seine *Höhe*.
- Hat ein Knoten keine Nachfolger oder *Söhne*, so heißt er *Endknoten* oder *Blatt* (leaf); ein Element, das nicht Endknoten ist, wird *innerer Knoten* genannt.
- Die Zahl der Söhne eines inneren Knotens nennt man den *Grad* des Knotens. Der höchste Grad unter allen Knoten ist der *Grad des Baumes*. Bäume vom Grad 2 heißen *Binärbäume*, Bäume vom Grad größer als 2 heißen *Vielweg-Bäume*.
- Die Zahl der Kanten von der Wurzel bis zum Knoten x heißt *Weglänge* von x . Die Wurzel hat Weglänge 0. Die *Weglänge eines Baumes* oder *innere Weglänge* ist definiert als die Summe der Weglängen aller seiner Knoten.
- Ein Baum ist *vollständig ausgeglichen*, wenn sich für jeden Knoten die Zahlen der Knoten in seinen Teilbäumen um höchstens 1 unterscheiden.
- Ein Baum ist genau dann *ausgeglichen* oder *AVL–ausgeglichen*, wenn sich für jeden Knoten die Höhen der zugehörigen Teilbäume um höchstens 1 unterscheiden. Bäume mit dieser Eigenschaft heißen *AVL–Bäume* nach ihren Schöpfern Adelson-Velskii und Landis.

2 Übungen

1. Der untenstehend dargestellte Baum ist nach allen Merkmalen zu untersuchen. Wie ist am sinnvollsten die *mittlere Weglänge* eines Baumes zu definieren? Bestimme die mittlere Weglänge des dargestellten Baumes.



2. Zeichne vollständig ausgeglichene Binärbäume mit $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ Knoten.
3. Zeichne einen AVL–ausgeglichene Baum, der nicht vollständig ausgeglichen ist.
4. Welche Beziehung besteht bei vollständig ausgeglichenen Bäumen zwischen der Anzahl der Knoten und der Höhe des Baumes?
5. Der am schlechtesten AVL–ausgeglichene Baum mit der Höhe h sei mit T_h bezeichnet. Stelle die Bäume T_1 bis T_5 graphisch dar.
6. Welche der Bäume T_1 bis T_5 sind noch vollständig ausgeglichen?
7. Welche Struktur ist zwischen T_h , T_{h-1} und T_{h-2} erkennbar? Gib eine Definition für die betrachteten Bäume an.
8. Mit N_h sei die Anzahl der Knoten von T_h bezeichnet. Stelle eine Rekursionsvorschrift für die Zahlen N_h auf. Lasse Dir die auch *Leonardo–Zahlen* genannten Zahlen durch ein kleines Programm bis $h = 20$ berechnen.